第 4 講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

PART1　剰余の定理

例題

(1)　多項式 $P(x)=2x^4+3x^3-ax+1$ を $x+2$ で割ったときの余りが 1 になるように，定数 a の値を定めよ。

(2)　多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りが 1，$x+2$ で割ると余りが 7 である。このとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

Point Pickup

練習

(1) 多項式 $2x^3-ax^2+8x-1$ を $2x-1$ で割ったときの余りが2になるように，定数 a の値を定めよ。

(2) 多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが9，$x+3$ で割ると余りが -1 である。このとき，$P(x)$ を x^2+x-6 で割ったときの余りを求めよ。

第 4 講　PART1 確認問題

1　多項式 $P(x)=9x^3+ax^2+4x+2$ を $3x+1$ で割ったときの余りが 3 になるように，定数 a の値を定めよ。

$a=$ [アイ]

2　多項式 $P(x)$ を $x+2$ で割ると余りが 2，$x-4$ で割ると余りが 20 である。このとき，$P(x)$をx^2-2x-8 で割ったときの余りを求めよ。

余り　[ウ]$x+$[エ]

第 4 講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

PART1　剰余の定理

例題

(1)　多項式 $P(x)=2x^4+3x^3-ax+1$ を $x+2$ で割ったときの余りが１になるように，定数 a の値を定めよ。

(2)　多項式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると余りが１，$x+2$ で割ると余りが７である。このとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ。

(1)　剰余の定理より　$P(-2)=1$

よって　$2\cdot(-2)^4+3\cdot(-2)^3-a\cdot(-2)+1=1$　より　$a=-4$

(2)　$P(x)$ を２次式 $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

剰余の定理より　$P(1)=1$，$P(-2)=7$

よって　$a+b=1$，$-2a+b=7$　　これを解いて　$a=-2$，$b=3$

したがって，求める余りは　$-2x+3$

練習

(1)　多項式 $2x^3-ax^2+8x-1$ を $2x-1$ で割ったときの余りが 2 になるように，定数 a の値を定めよ。

(2)　多項式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 9，$x+3$ で割ると余りが -1 である。このとき，$P(x)$ を x^2+x-6 で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$P(x)=2x^3-ax^2+8x-1$ とおくと，剰余の定理により　$P\left(\frac{1}{2}\right)=2$

よって　$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\cdot\frac{1}{2}-1=2$　より　$a=5$

(2)　$P(x)$ を 2 次式 x^2+x-6，すなわち $(x-2)(x+3)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b$$

剰余の定理より　$P(2)=9$，$P(-3)=-1$

よって　$2a+b=9$，$-3a+b=-1$　　これを解いて　$a=2$，$b=5$

したがって，求める余りは　$2x+5$

第４講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：24

[解説]

$P(x)=9x^3+ax^2+4x+2$ であり，$P(x)$ を $3x+1$ で割ったときの余りが 3 であるから，剰余の定理より

$$P\left(-\frac{1}{3}\right)=3 \quad \text{[A]}$$

よって

$$9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3+a\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2=3$$

より

$$\boldsymbol{a=24}$$

[A]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは
$P\left(-\frac{b}{a}\right)$

2

[正解] ウ：3，エ：8

[解説]

$P(x)$ を 2 次式 x^2-2x-8，すなわち $(x+2)(x-4)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x+2)(x-4)Q(x)+ax+b \quad \text{[B]}$$

$P(x)$ を $x+2$ で割った余りが 2，$x-4$ で割った余りが 20 であるから，剰余の定理より

$$P(-2)=2,\ P(4)=20 \quad \text{[C]}$$

よって　$-2a+b=2$，$4a+b=20$

これを解いて　$a=3$，$b=8$

したがって，求める余りは　$\boldsymbol{3x+8}$

[B]　多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると
$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$（R は定数）

[C]　剰余の定理
多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは $P(k)$ である。